M A T E M A T I K A   A2

Požadavky ke zkoušce v LS 2020-21

Před zkouškou je nutné získat zápočet ze cvičení, bez uděleného zápočtu, zapsaného v SISu, nebude student ke zkoušce připuštěn.

Průběh zkoušky:
Zkouška z matematiky A2 může mít, vzhledem k zrušení prezenční výuky v celém semestru, pouze písemnou formu, pokud si ale budete přát, můžete být zkoušeni i ústně.

Písemná část zkoušky trvá dvě hodiny a řeší se v ní tyto úlohy :

1. Nalezení řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty (obecného řešení i splňujícího dané počáteční podmínky).
2. Vyšetření základních vlastností funkce dvou proměnných (definiční obor, spojitost, diferencovatelnost funkce), výpočet parciálních derivací, jejich užití k nalezení totálního diferenciálu funkce, lineární aproximaci funkce a rovnice tečné roviny ke grafu funkce dvou proměnných, vyšetření existence lokálních nebo absolutních extrémů funkce dvou proměnných (v jednoduchých případech);
3. Výpočet a aplikace dvojného nebo trojného integrálu.
4. Výpočet křivkového integrálu skalární nebo vektorové funkce; ověření potenciálnosti daného vektorového pole a výpočet potenciálu daného potenciálního vektorového pole.
5. Aspoň jeden z následujících tří příkladů (můžete si vybrat jen jeden, ale můžete řešit i všechny tři):
   a) vyšetření existence funkce, definované implicitně zadanou rovnicí v okolí daného bodu, výpočet a užití derivací implicitní funkce (k lineární aproximaci implicitní funkce nebo k vyšetření lokálního extrému funkce dvou proměnných, definované implicitně);
   b) příklad z lineární algebry - vyšetřování lineárních zobrazení z R^n do R^m;
   c) vyšetření konvergence nevlastního integrálu.

U každé úlohy v testu jsou i „jednoduché“ otázky, ověřující znalost definic a základních vět z probrané látky, která souvisí se zadaným příkladem.
Z písemné práce je třeba k vykonání zkoušky získat alespoň polovinu bodů z možného maxima bodů.

A zde je souhrn toho, co je třeba z Matematiky A2 znát:

1. Předpokládá se znalost látky z Matematiky A1.

2. Lineární algebra:

vektorový (lineární) prostor obecně: definice, základní pojmy, příklady lineárních prostorů;

n-rozměrný aritmetický vektor, n-rozměrný aritmetický prostor R^n:
n-rozměrný aritmetický vektor, lineární kombinace vektorů, lineární závislost a nezávislost skupiny vektorů, base a dimense prostoru R^n;

matice:
sčítání a násobení matic, ekvivalentní úpravy matice, hodnost matice;
čtvercové matice - regulární a singulární čtvercová matice, inversní matice – definice, existence, výpočet;
determinant čtvercové matice: definice a vlastnosti, rozvoj determinantu podle řádku nebo sloupce, výpočet determinantu; výpočet inversní matice pomocí determinantů;

řešení soustav lineárních algebraických rovnic Gaussovou metodou, užitím Cramerova pravidla a pomocí inversní matice.

lineární zobrazení vektorových prostorů, spec.lineární zobrazení z R^n do R^m a jeho vyjádření pomocí matic;
vlastnosti lineárního zobrazení – zobrazení prosté, na, inverzní;

vlastní čísla a vlastní vektory matice.

3. Diferenciální rovnice:

lineární diferenciální rovnice 2.řádu (obecně) – základní pojmy:

počáteční (Cauchyho) úloha, věta o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy pro lineární ; obecné řešení lineární diferenciální rovnice 2.řádu, řešení homogenní rovnice (dimenze lineárního prostoru řešení, fundamentální systém řešení a obecné řešení rovnice bez pravé strany), řešení rovnice s pravou stranou -metoda variace konstant;

lineární diferenciální rovnice 2.řádu s konstantními koeficienty:

charakteristická rovnice, fundamentální systém řešení a obecné řešení rovnice bez pravé strany; partikulární a obecné řešení rovnice s pravou stranou, nalezení partikulárního řešení metodou variace konstant a odhad partikulárního řešení pro speciální pravé strany; nalezení řešení počáteční úlohy; aplikace lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu;

nepovinné - soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty a nulovými pravými stranami.

4. Diferenciální počet funkcí více proměnných:

metrický prostor R^n:

metrika, okolí bodu, konvergence posloupnosti bodů v R^n, množina otevřená, uzavřená, hranice množiny, hromadný bod množiny, uzávěr množiny, souvislá množina, oblast;

skalární a vektorová funkce více reálných proměnných: definiční obor, příklady;

limita a spojitost - základní věty o limitách a spojitosti, vlastnosti spojitých funkcí;

parciální derivace - definice, základní věty a výpočet, záměnnost parciálních derivací vyšších řádů; gradient funkce; definice derivace ve směru;

diferencovatelnost funkce, totální diferenciál funkce - definice, geometrický smysl (tečná rovina ke grafu funkce dvou proměnných), lineární aproximace funkce, souvislost mezi diferencovatelností funkce a existencí parciálních derivací, postačující podmínka pro diferencovatelnost funkce;

věta o derivaci složené funkce více proměnných –vzorec pro výpočet derivace ve směru (pro funkce diferencovatelné), věta o derivování složených funkcí více proměnných, užití věty o derivování složených funkcí pro transformaci diferenciálních operátorů při změně souřadnic;

diferenciály vyšších řádů, Taylorova věta pro funkce více proměnných;

věta o implicitní funkci jedné i více proměnných - výpočet derivací funkce, dané implicitně; aproximace implicitně definované funkce Taylorovým polynomem 1. nebo 2. stupně; rovnice tečny ke křivce, dané rovnicí $F(x,y) = 0$ a tečné roviny k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z) = 0$;

extrémy funkcí více proměnných - globální extrém funkce na dané množině, lokální extrém, nutná podmínka pro lokální extrém, postačující podmínka pro existenci lokálního extrému u funkcí dvou proměnných; globální extrémy spojité funkce dvou proměnných na uzavřené a omezené množině.

5. Dvojný a trojný integrál:

měřitelná množina, definice dvojného a trojného integrálu;

nutná podmínka integrovatelnosti funkce na měřitelné množině, postačující podmínky integrovatelnosti,;

základní vlastnosti dvojného a trojného integrálu;

výpočet - Fubiniova věta (převedení dvojného, resp. trojného integrálu na integraci dvojnásobnou, resp. trojnásobnou); věta o substituci (polární, resp.válcové, resp. sférické souřadnice);

užití dvojného a trojného integrálu při výpočtu obsahu rovinné oblasti, objemu a hmotnosti tělesa, souřadnic těžiště a momentů setrvačnosti rovinných nebo prostorových hmotných oblastí.

6. Křivkový integrál:

křivka v R^3 (R^2) - definice, parametrické vyjádření křivky, tečna ke křivce, délka křivky;

křivkový integrál skalární funkce - definice, nutná podmínka existence, postačující podmínky existence, základní vlastnosti, výpočet, aplikace;

křivkový integrál vektorové funkce - definice převedením na křivkový integrál ze skalární funkce, výpočet, vlastnosti;

nezávislost křivkového integrálu vektorové funkce na cestě a potenciální vektorové pole –

nutná a postačující podmínka nezávislosti křivkového integrálu na cestě, potenciální vektorové pole, potenciál, výpočet potenciálu, výpočet práce potenciálního pole.

7. Nevlastní integrál :

definice, pojem konvergence a divergence nevlastního integrálu, kriteria konvergence integrálu z nezáporné funkce (srovnávací, limitní srovnávací kriterium), absolutní konvergence nevlastního integrálu.

8. Nekonečné řady – nezkouší se, ale dobrovolně lze o nich něco napsat jako dodatek k písemné práci, nebo o nich pohovořit u zkoušky ústní :

nekonečné číselné řady - konvergence, divergence řady, definice součtu nekonečné řady, základní vlastnosti nekonečných řad, nutná podmínka konvergence;

kriteria konvergence řad s nezápornými členy - srovnávací, limitní srovnávací, integrální;

pojem absolutní konvergence;

nekonečné funkční řady - mocninné řady - poloměr konvergence, obor konvergence a základní vlastnosti.

5.5.2021

N.Krylová